

Dificultades en el Aprendizaje de la Función Definida por Tramos: una mirada desde el enfoque instrumental de Pierre Rabardel

Difficulties in Learning the Function Defined by Sections: a look from the instrumental approach of Pierre Rabardel

Recepción del artículo: 31-10-19 | Aceptación del artículo: 01-12-19

Chumpitaz-Malpartida,
Luis Daniel
dchumpitaz@usil.edu.pe

Pontificia Universidad
Católica del Perú
Unidad San Ignacio de Loyola
ORCID:
<https://orcid.org/0000-0002-7374-4524>

Resumen

Luego del diseño y validación de una secuencia de aprendizaje, se llevó a cabo una experiencia de aprendizaje con estudiantes de las carreras de Ingeniería en la Universidad San Ignacio de Loyola. Para ello, los estudiantes identificaron elementos como dominio, rango e intervalos de monotonía; representaron la gráfica en un plano cartesiano; determinaron la regla de correspondencia, y realizaron transformaciones a las gráficas de las funciones definidas por tramos presentadas en las actividades de esta secuencia. Se realizó un estudio de las dificultades en el aprendizaje de la Función Definida por Tramos, debido a que es válido afirmar que, si existe la posibilidad de reducir dificultades, esto podría, a su vez, minimizar las dificultades en el aprendizaje de nuevos conocimientos del Cálculo, como los conceptos en la teoría de límites y continuidad, y en particular, en funciones cuyas gráficas no pueden ser realizadas con un solo trazo. Para identificar estas dificultades en las acciones de los estudiantes, estudiamos la Función Definida por Tramos como un objeto semiótico desde el enfoque instrumental desarrollado por Rabardel (1995). En el análisis de las interacciones de los estudiantes con la Función Definida por Tramos, se identificó que los estudiantes movilizaron esquemas de uso preexistentes que permitieron minimizar las dificultades en la secuencia de aprendizaje. También se pudo observar en las últimas actividades que algunas propiedades de este artefacto conservaron las funciones adquiridas durante su transformación a instrumento.

Palabras clave: Génesis instrumental, Función Definida por Tramos.

Para referenciar este artículo:

Chumpitaz–Malpartida, L. D. (2019). Dificultades en el Aprendizaje de la Función Definida por Tramos: una mirada desde el enfoque instrumental de Pierre Rabardel. *Revista ConCiencia EPG*, 4(2), 1-10.
<https://doi.org/10.32654/CONCIENCIAEPG.4-2.1>

Abstract

After the designing and validation of a learning sequence, it was developed a learning experience with the students of the engineering career major at Universidad San Ignacio de Loyola. In this learning session, the students were able to identify the domain, range, monotony ranges, represent the graphic in a Cartesian plane, determine the correspondence rule and transform the graphics of the Piecewise functions showed in the activities of this sequence. A study of the difficulties in the learning process of this function was developed because we believe that if there is a possibility of minimize them, this, at the same time, could minimize the difficulties in the learning process of new knowledge of Calculus, such as the concepts in the Limits Theory and Continuity, especially in functions where graphics cannot be done by just one line. To identify these difficulties in the students' actions, we observed the Piecewise functions as a semiotic object from the Instrumental Approach developed by Rabardel (1995). As a result of this analysis, we could identify that the students moved schemes of preexisted uses, which permitted to minimize the difficulties in the learning sequence, and also, in the last activities some properties of this artifact kept the acquired functions during its transformation to an instrument.

Keywords: Instrumental genesis, piecewise function.

Introducción

Los aspectos de este artículo forman parte de la investigación que se realizó para la tesis defendida por Chumpitaz (2013). De esta se abordará el estudio de un proceso de

instrumentalización relacionado con el aprendizaje de la Función Definida por Tramos por medio del software GeoGebra. Las conclusiones que se mostrarán son productos de la metodología de la Ingeniería Didáctica seleccionada para la investigación, la que permitió confrontar los análisis a priori y a posteriori del ítem b de la actividad 8 que se describirá más adelante.

Aspectos del enfoque instrumental

Para el estudio de la Función Definida por Tramos como instrumento de aprendizaje, se usa como base teórica el enfoque instrumental presentado por Rabardel (2011). Es necesario considerar los términos de este enfoque descritos por Salazar (2009). Estos términos clave permitieron realizar el estudio de la actividad con instrumentos.

- *Sujeto*: Se refiere a un individuo o grupo de individuos que desarrollan una acción y/o son elegidos para el estudio.
- *Esquemas de utilización*: Se entiende como una organización invariante de comportamientos para clases de situaciones.

Respecto a la orientación antropotécnica establecida por Rabardel (2011), se tiene que:

- *Artefacto*: Se entiende como una cosa susceptible de su uso, elaborada para inscribirse en actividades intencionales. Puede ser un medio material. Por ejemplo: un computador o una regla. También puede ser un medio simbólico. Por ejemplo: el código Morse, la iconografía inca, el lenguaje algebraico, un gráfico en un sistema de coordenadas.
- *Instrumento*: Se entiende como un artefacto en situación, inscrito en su uso. El concepto de instrumento

involucra tanto el artefacto como los esquemas mentales desarrollados por el estudiante cuando realiza una clase de tareas, como se representa en la figura 1.



Figura 1. Componentes de un instrumento. Chumpitaz (2013, p. 26)

Rabardel (1995) denominó al proceso de transformación progresiva del artefacto en instrumento como Génesis Instrumental. Así, propuso el modelo de Situaciones de la Actividad Instrumentada (SAI) con la finalidad de caracterizar, desde los polos *sujeto*, *instrumento* y *objeto*, las situaciones donde el artefacto sufre una transformación. Las posibles interacciones son descritas en la figura 2.

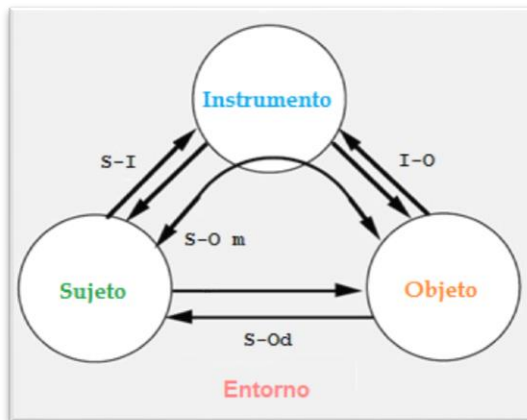


Figura 2. Modelo de Situaciones de la Actividad Instrumentada. Rabardel (2011, p.98).

Para analizar las acciones de los estudiantes (sujetos) en su aprendizaje de la Función Definida por Tramos (objeto/instrumento) mediados por el GeoGebra (instrumento), es necesario considerar este modelo, ya que permite observar algunas interacciones entre los

elementos de la triada en la situación de aprendizaje que se planteó para este estudio. Estas interacciones se encuentran representadas en la figura 2 y son descritas de la siguiente manera.

- [S – O d] Sujeto – Objeto (directa)
- [S - I] Sujeto – Instrumento
- [I - O] Instrumento – Objeto

La evolución de artefactos concierne a dos dimensiones, dos orientaciones diferentes y a la vez conjuntas: la instrumentalización dirigida hacia el artefacto y la instrumentación dirigida hacia el sujeto mismo, como se describe a continuación:

- La *instrumentalización* es un proceso referido al surgimiento y evolución de los componentes artefacto del instrumento: selección, reagrupación, producción, institución de funciones, atribución de propiedades y transformación del artefacto (estructura, funcionamiento, etc.), que prolongan las creaciones y realizaciones de artefactos cuyos límites son difíciles de determinar debido a este proceso de transformación.
- La *instrumentación* es un proceso relativo al surgimiento y a la evolución de los esquemas de utilización y de acción instrumentada: constitución, funcionamiento, evolución por acomodación, coordinación, combinación, inclusión y asimilación recíproca, combinación y asimilación de artefactos nuevos a esquemas ya constituidos.

Se pueden distinguir dos niveles de instrumentalización por atribución de función a un artefacto: en un primer nivel, la

instrumentalización es local, relacionada con una acción singular y con circunstancias de su desarrollo, donde el artefacto está instrumentalizado momentáneamente. En un segundo nivel, la función adquirida se conserva de manera durable como una propiedad del artefacto en relación con una clase de acciones, de objetos de la actividad de situaciones. Aquí, la instrumentalización es durable o permanente.

Cabe aclarar que los procesos de instrumentalización no se limitan a los artefactos de carácter tecnológico. Por ejemplo, de acuerdo con Rabardel (1995), los lenguajes operativos son productos de una transformación hecha por operarios. Respecto a la instrumentalización, Trouche (2004) sugiere la existencia de tres estadios:

- *Estadio de descubrimiento y selección de las teclas y comandos relevantes:* se da cuando un estudiante selecciona un ícono de la barra de herramientas o identifica un comando de la barra de entrada para representar gráficamente una función en el GeoGebra.
- *Estadio de personalización:* se da cuando un estudiante usa el “Zoom” del GeoGebra para tener una mejor vista de los detalles de los objetos que se pueden construir o manipular en la ventana gráfica del software.
- *Estadio de transformación:* se da cuando el estudiante crea en la barra de herramientas del GeoGebra una “macro” para realizar varias construcciones “rápidas”, todas basadas en el mismo proceso.

Teniendo como base este enfoque instrumental, consideramos que existe la necesidad de caracterizar la forma en la que los estudiantes se enfrentan a las restricciones de la situación de la actividad

con instrumentos. Respecto a esto, Rabardel (2011) señala tres tipos de restricciones que impone el artefacto:

1. Restricciones de modalidades de existencia: relacionadas con propiedades del artefacto como objeto material o cognitivo. Respecto a una Función Definida por Tramos, como ejemplo tenemos: el dominio, rango, monotonía y si la función es positiva o negativa.
2. Restricciones de intencionalidad: relacionadas con los objetos sobre los cuales permite actuar y las transformaciones que autoriza. Respecto a una Función Definida por Tramos, como ejemplo tenemos: las traslaciones horizontales y verticales, las reflexiones, las contracciones y estiramientos de la gráfica de la función.
3. Restricciones de estructuración de la acción: relacionadas con la preestructuración de la acción del usuario. Respecto a la geometría dinámica de la Función Definida por Tramos, como ejemplo se tiene lo siguiente: una función con dominio abierto o cerrado, un punto u objeto fijo, desplazable o semidesplazable, y el establecimiento de un deslizador que permite controlar la traslación de la gráfica por el plano cartesiano.

El enfoque instrumental establece que las acciones de los estudiantes también están influenciadas por la manera como el artefacto es comprensible para ellos; es decir, qué tan visible es el artefacto o parte de él. Esta visibilidad es tratada por Rabardel (2011) en términos de “transparencia del artefacto”. De los distintos tipos de

transparencia que analizó, se describen brevemente los siguientes:

- *Transparencia operativa*: Permite analizar a partir la estructura y el funcionamiento del artefacto sobre el cual actúa el sujeto en su interacción con él objeto. En nuestro caso la estructura y funcionamiento de la función definida por tramos o el GeoGebra.
- *Transparencia cognitiva*: Permite definir el grado de accesibilidad del sujeto a los conocimientos, procedimientos y modelos subyacentes al funcionamiento de un artefacto cognitivo en relación a una tarea que se debe cumplir este.

Para efectos de la identificación de las dificultades se consideró la transparencia cognitiva, ya que permitió analizar la visibilidad de las herramientas del tipo cognitiva de un objeto semiótico como la Función Definida por Tramos.

Método

Diseño de investigación. - el diseño en la que se desarrolló el estudio es el experimental puro en la que participaron dos grupos de estudiantes. Para realizar el estudio elegimos la Ingeniería Didáctica debido a que esta investigación corresponde a una situación de enseñanza-aprendizaje de matemática en un entorno universitario.

Artigue, Douady y Moreno (1995) proponen la Ingeniería Didáctica como:

- Una metodología de investigación experimental del tipo casuístico.
- Un método de producción de situaciones didácticas.

Como metodología, su esquema experimental está orientado a las observaciones y el análisis de las secuencias de aprendizaje en el aula; en nuestro caso, de

la Función Definida por Tramos en un medio de interacción con el recurso tecnológico GeoGebra. El control de la validez se realiza en forma interna y se consigue por contraste entre lo que planificamos y lo que realmente sucedió en las actividades diseñadas para nuestra investigación.

Según Artigue et al. (1995), la Ingeniería Didáctica consta de cuatro fases:

- *Fase 1: Análisis preliminar*

Se realiza un análisis respecto a los aspectos teóricos necesarios y los conocimientos didácticos necesarios para la investigación. Esto se realiza en los niveles epistemológico, cognitivo y didáctico.

- *Fase 2: Concepción y análisis a priori*

Se establecen las variables más apropiadas a la investigación. Estas pueden ser de dos tipos: macrodidácticas y microdidácticas.

- *Fase 3: Experimentación*

Se establece la experiencia de los estudiantes involucrando al investigador/profesor/observador. Se establece el contrato didáctico y se aplican los instrumentos diseñados por el investigador.

- *Fase 4: Análisis a posteriori y validación*

Se realiza un análisis de las observaciones efectuadas en la secuencia de enseñanza-aprendizaje. Se hace una comparación entre los análisis a priori y a posteriori, y se establecen los aspectos logrados y las cuestiones que quedan abiertas.

Participantes. - En esta experiencia participaron seis estudiantes del curso de Análisis Matemático I de la Universidad San Ignacio de Loyola, organizados en dos equipos de tres estudiantes, denominados Equipo 1 y Equipo 2. El encuentro consistió en el desenvolvimiento de los estudiantes en una secuencia de aprendizaje de la Función

Definida por Tramos mediado por el software GeoGebra. La secuencia didáctica diseñada llevó como título “Función Definida por Tramos a través del software GeoGebra”. Esta fue estructurada de la siguiente manera:

Procedimiento. - Las 10 actividades instrumentadas fueron entregadas a cada equipo de estudiantes en una ficha de trabajo. Cada una de estas actividades fue denominada en esta ficha con el término “Pregunta”. Las preguntas del 5 al 10 fueron preparadas para iniciar a los estudiantes en el uso de propiedades intrínsecas de la Función Definida por Tramos, como también el identificar las funciones que instituyen en las propiedades intrínsecas y si estas son funciones momentáneas o si existe la posibilidad de que sean permanentes.

En relación con la pregunta 8, razón de este artículo, esta contiene cuatro ítems cuya distribución se encuentra relacionada con el archivo de GeoGebra “Pregunta_8a.ggb”, que fue entregado a los dos equipos de estudiantes. Este archivo presentó, por defecto, características como la activación o desactivación de la cuadrícula de la vista gráfica, la activación o desactivación, de forma general, de estándar de la regla de correspondencia y la representación gráfica de las funciones correspondiente a las preguntas de la actividad de aprendizaje. Estos archivos fueron diseñados con el objetivo de disminuir la presencia de dificultades en las acciones de los estudiantes al realizar las actividades instrumentadas.

PREGUNTA 8

Al abrir el archivo `Pregunta_8a.ggb`, encontrarán la representación gráfica de una función g con regla de correspondencia $g(x) = -|x+1|+2$ y cuyo dominio es el conjunto de los números reales. Según esta información efectúen lo siguiente:

- a) La función g del archivo abierto “Pregunta_8a.ggb” puede ser expresada como una función definida en dos tramos, cuya regla de correspondencia tiene la forma:

$$g(x) = \begin{cases} g_1(x) & \text{si } x \in]-\infty; -1[\\ g_2(x) & \text{si } x \in [-1; \infty[\end{cases}$$

Usando las opciones de la “Barra de Herramientas” del GeoGebra determinen las reglas de correspondencia $g_1(x)$ y $g_2(x)$ de la función g .

Reglas de correspondencia $g_1(x)$ y $g_2(x)$ de la función g

$$g_1(x) = \text{_____} \qquad g_2(x) = \text{_____}$$

- b) Use la información obtenida en a) para escribir la regla de correspondencia de g como una función definida por tramos.

Regla de correspondencia de g como una función definida por tramos

Al culminar, salven las modificaciones o construcciones en este archivo haciendo clic consecutivamente en "Archivo > Guardar" de la barra de menús de GeoGebra. Cierren el archivo y continúen con la siguiente pregunta.

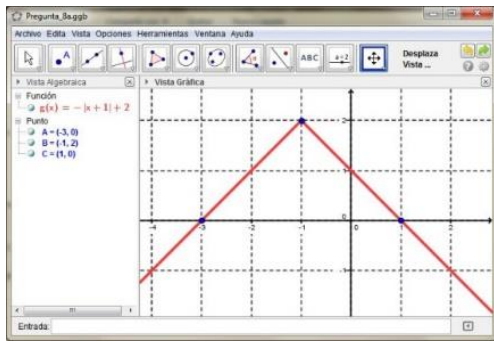
c) En el archivo Pregunta_8b.ggb del GeoGebra grafiquen la función g ingresando en el GeoGebra la regla de correspondencia del ítem b).

d) A continuación, redacten la secuencia de pasos que utilizaron en la parte c).

Proceso de construcción de la gráfica de g usando comandos

Al culminar, salven las modificaciones o construcciones en este archivo haciendo clic consecutivamente en "Archivo > Guardar" de la barra de menús de GeoGebra. Cierren el archivo y continúen con la siguiente pregunta.

Archivo Pregunta_8a.ggb



Archivo Pregunta_8b.ggb

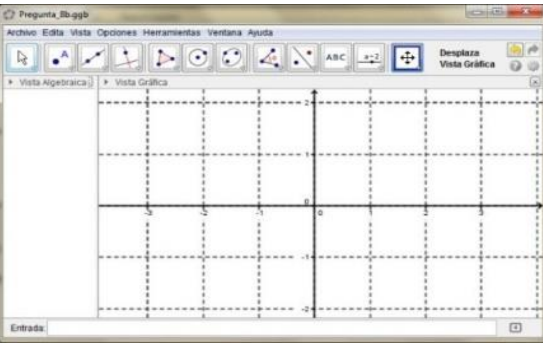


Figura 3. Imagen de la Pregunta 8. Chumpitaz (2013, p. 10)

Resultados

A continuación, se realizará la descripción y los respectivos análisis a priori y a posteriori de las acciones de los estudiantes en el desarrollo del ítem b de la pregunta 8:

Análisis a priori

Los estudiantes establecerán la relación entre los dominios y las reglas de correspondencia y obtenidas. Con base en esa relación, los estudiantes escribirán en la ficha de trabajo la regla de correspondencia

de la función como una Función Definida por Tramos. Esta regla será la siguiente:

$$g(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si } x \in]-\infty; -1[\\ -x+1 & \text{si } x \in [-1; \infty[\end{cases}$$

o

$$g(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si } x < -1 \\ -x+1 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

Descripción del trabajo del equipo 1:

.

Regla de correspondencia de g como una Función Definida por Tramos
$g(x) = \begin{cases} x+3 < -1 \\ -x+1 \geq -1 \end{cases}$

Figura 4. Pregunta 8-b desarrollada por el equipo 1. Chumpitaz (2013, p. 111).

Se observó que los estudiantes que leyeron el enunciado más de una vez mostraron dudas en cómo escribir la regla de correspondencia de la Función Definida por Tramos. Vemos que, luego de escribir en la ficha de trabajo la regla de correspondencia de esta función, no expresan correctamente el dominio de cada uno de los tramos de dicha función.

Análisis a posteriori Equipo 1.

En las acciones de los estudiantes como sujetos de la triada del modelo SAI, se toman en cuenta los siguientes estatus de los elementos que interactúan en esta tarea:

Tabla 1
Regla de una Función Definida por Tramos (Modelo SAI) – Equipo 1

Modelo SAI: Regla de correspondencia de una Función Definida por Tramos		
Instrumento	Acción	Objeto
I Expresiones de $g_1(x)$ y $g_2(x)$	Escriben la regla de correspondencia de g	Función g
II Expresión del enunciado de la pregunta 8 $g(x) = \begin{cases} g_1(x) & \text{si } x \in]-\infty; -1[\\ g_2(x) & \text{si } x \in [-1; \infty[\end{cases}$	Completan las expresiones de $g_1(x)$ y $g_2(x)$	$g_1(x)$ y $g_2(x)$

Las dificultades que presentaba el Equipo 1 para representar la regla de correspondencia permiten afirmar que la regla de correspondencia de la Función Definida por Tramos g no es suficientemente transparente en esta

actividad. De acuerdo con Trouche (2004), la regla de correspondencia de la función g se encuentra en un estadio de descubrimiento.

Descripción del trabajo del Equipo 2:

Regla de correspondencia de g como una Función Definida por Tramos	
$g(x) = \begin{cases} -x + y = 3 & \text{si } x \in]-\infty ; -1[\\ x + y = 1 & \text{si } x \in [-1 ; \infty [\end{cases}$	

Figura 5. Pregunta 8-b desarrollada por el Equipo 2. Chumpitaz (2013, p. 112).

Se observó que los estudiantes lograron establecer rápidamente la relación entre los dominios y las reglas de correspondencia $g_1(x)$ y $g_2(x)$ obtenidas. Luego escribieron, en la ficha de trabajo, la regla de correspondencia de la función g como una Función Definida por Tramos. En dicha expresión se observa que las reglas de

correspondencia de los tramos no están expresadas como función de la variable “ x ”.

Análisis a posteriori Equipo 2.

En las acciones de los estudiantes como sujetos de la triada del modelo SAI, se toman en cuenta los siguientes estatus de los elementos que interactúan en esta tarea:

Tabla 2

Regla de una Función Definida por Tramos (Modelo SAI) – Equipo 2

Modelo SAI: Regla de correspondencia de una Función Definida por Tramos			
	Instrumento	Acción	Objeto
I	Expresiones de $g_1(x)$ y $g_2(x)$	Escriben la regla de correspondencia de g	Función g
II	Expresión del enunciado de la pregunta 8 $g(x) = \begin{cases} g_1(x) & \text{si } x \in]-\infty; -1[\\ g_2(x) & \text{si } x \in [-1; \infty[\end{cases}$	Completan las expresiones de $g_1(x)$ y $g_2(x)$	$g_1(x)$ y $g_2(x)$

El Equipo 2 no muestra dificultades para representar la regla de correspondencia de la Función Definida por Tramos debido a que g no fue expresada con reglas que representen funciones de la variable “ x ”. Se puede asegurar que la regla de correspondencia de la función g no fue suficientemente transparente en esta actividad. De acuerdo con Trouche (2004), la regla de correspondencia de la función g se encuentra en un estadio de descubrimiento.

Discusión y conclusiones

En relación con las últimas actividades de la secuencia de aprendizaje presentadas en Chumpitaz (2013), la actividad 8b permite afirmar que no se conservan todas las propiedades relacionadas con la estructura de la regla de correspondencia adquiridas por los estudiantes en actividades anteriores. Desde el enfoque instrumental de Rabardel (2011), los estudiantes presentaron dificultades en movilizar algunos esquemas en sus acciones

en la secuencia de aprendizaje, lo que permitiría asegurar que el proceso de instrumentalización de la Función Definida por Tramos fue local.

Podemos señalar que, las tablas de los análisis *a posteriori*, construidas respecto al modelo SAI de Rabardel (2011), permitieron identificar las dificultades en la compleja serie de acciones de los estudiantes durante esta actividad.

Los resultados del análisis de esta actividad confirman que se presentan dificultades en el aprendizaje de la función por tramos como consecuencia de, el aspecto

gráfico de esta función como se señala en las conclusiones de Yam (2009), y de las diversas configuraciones en que se pueden presentar las reglas de correspondencia como la función escalón unitario y la función de Dirichlet.

Finalmente, este estudio deja la posibilidad para nuevas investigaciones, que pueda considerarse identificar las dificultades que presentan los estudiantes cuando aprenden, límites, continuidad y la transformada de Laplace, temas donde se presenta el uso de la función definida por tramos.

Referencias

- Artigue, M., Douady, R. & Moreno, L. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. Grupo Editorial Iberoamericana.
- Chumpitaz, L. (2013). *Génesis instrumental: Un estudio de los procesos de instrumentalización en el aprendizaje de la Función Definida por Tramos mediado por el software GeoGebra con estudiantes de Ingeniería* (Tesis de maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú.
- Rabardel, P. (2011). *Los hombres y las tecnologías: Visión cognitiva de los instrumentos contemporáneos* (Trad. por M. Acosta). Universidad Industrial de Santander.
- Rabardel, P. (1995). *Les Hommes et les Technologies: une approche cognitive des instruments contemporains*. <http://ergoserv.univ-paris8.fr/site/groupes/modele/articles/public/art372105503765426783.pdf>
- Salazar Flores, J. (2009). *Gênese instrumental na interação com Cabri*
- 3D: *um estudo de transformações geométricas no espaço* (Tesis doctoral). Pontificia Universidad Católica de Sao Paulo, Brasil.
- Trouche, L. (2004). *Managing the Complexity of Human/Machine Interaction in a Computer Based Learning Environment (CBLE)*. Guiding Student's Process command through instrumental orchestrations. University Montpellier II. Recuperado de http://www.researchgate.net/publication/226396176_Managing_the_Complexity_of_HumanMachine_Interaction_in_Computerized_Learning_Environments_Guiding_Students_Command_Process_through_Instrumental_Orchestrations
- Yam Huh, E. (2009). *Función definida por partes: Un análisis histórico – didáctico referente a su tratamiento escolar*. (Tesis de licenciatura). Universidad Autónoma de Yucatán. México.